LinAlg PVK HS19 06.01.20

Zeitplan:

Morgen:

- QR mit Givens / Householder
- Untervektorräume
- Basis, Kern & Bild
- Gram-Schmidt
- Verallgemeinerte Norm & Skalarprodukt
- $A^k x$ (Eigenwertproblem)
- Differentialgleichungen 1. Ordn.

Nachmittag:

- Prüfung HS 18
  - ↳ Orthogonalisierung & QR
  - ↳ e^C
  - ↳ Lineare Abbildungen & Abbildungsmatrizen
  - ↳ Basiswechsel
  - ↳ Ausgleichsrechnung mit SVD
  - ↳ Beweisaufgabe (Schur-Zerlegung)
  - ↳ Multiple Choice

QR-Zerlegung mit Givensrotation & Householderspiegelung:

Beispiel Givens:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 4 \end{bmatrix} = Q \cdot R$$

(i) a_{21}

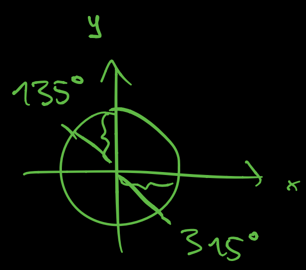
(ii)

$$G = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$G \cdot A = R = \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \underbrace{\boxed{-\sin\varphi - \cos\varphi}}_{=0} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$A = QR$$

$$\cos\varphi = -\sin\varphi$$

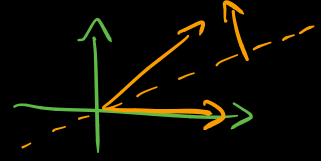


$315°$: $\sin(315°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(315°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$Q = G^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Beispiel Householder:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$$



(i) $\underline{a}_{i1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|\underline{a}_{i1}\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = \underline{3} \qquad \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

(ii) $\underline{v} = \underline{a}_{i1} + \|\underline{a}_{i1}\| \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} - \frac{2}{\underline{v}^T \underline{v}} \underline{v}\,\underline{v}^T = \underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T$$

(iii) $\underline{u} = \dfrac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$$

(iv) $\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \dfrac{1}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}} = \underline{\underline{H}}$$

$$H \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{bmatrix}$$

$$Q = \underline{\underline{H^T}}$$

$$(H_2 H_1)^T = Q$$

Untervektorraum & Regeln:

$U \neq \emptyset$ ist ein UVR, falls er eine Teilmenge eines VR ist, und: $\forall a,b \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $a + b \in U$

(ii) $\alpha \cdot a \in U$

Beispiel: $U = \{ A \in V \text{ s.d. } A^T = -A \}$

(i) $\forall U_1, U_2 \in U$:

$$(U_1 + U_2)^T = \underbrace{U_1^T} + \underbrace{U_2^T} = -U_1 - U_2 = -(U_1 + U_2) \checkmark$$

(ii) $\forall U \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha \cdot U)^T = \alpha \cdot U^T = -\alpha U = -(\alpha U) \checkmark$$

Basis beweisen:

Beispiel: $C = \{ c^{(1)} = 2,\ c^{(2)} = x^2 + x - 1,\ c^{(3)} = 2x^2 - 5x \}$

$$1 = \frac{1}{2} c^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$x = \frac{c^{(3)} - 2c^{(2)} - c^{(1)}}{7}$$

$$x^2 = \frac{5c^{(2)} + c^{(3)} + \frac{5}{2} c^{(1)}}{7}$$

Nur 3 Vektoren $\Rightarrow$ minimales $\Rightarrow$ Erzeugendensystem $\Rightarrow$ **Basis**

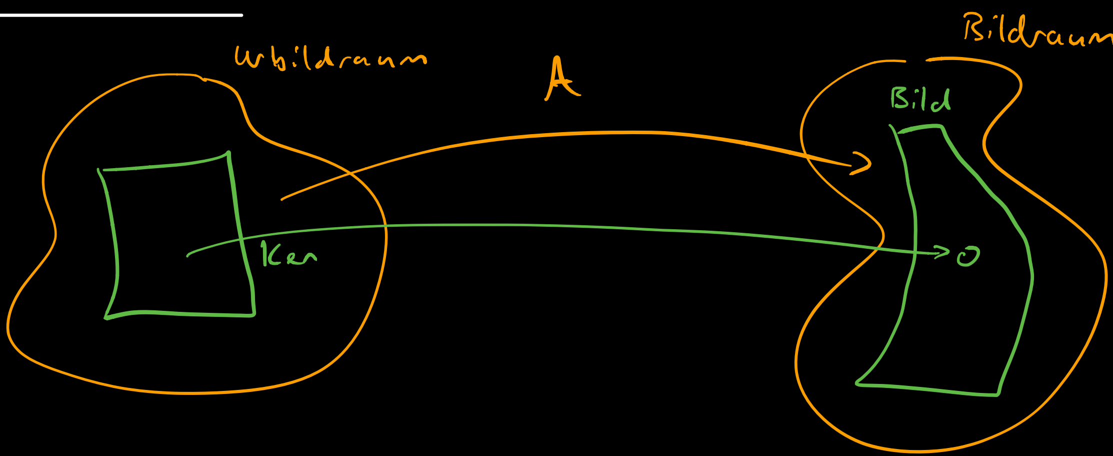
Auf lin. unabh. überprüfen:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} \end{matrix} \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } 3$$

$\Rightarrow$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ Basis.

Basis von Kern & Bild:



Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \begin{array}{ccccc} & & \downarrow & \downarrow & \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & \vert\ 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & \vert\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vert\ 0 \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} x_4 &= s \in \mathbb{R} \\ x_3 &= t \in \mathbb{R} \\ x_2 &= \frac{3s-3t}{2} \\ x_1 &= \frac{-x_3-x_2}{2} \\ &= \frac{-t+\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}s}{2} \\ &= \underline{\frac{1}{4}t-\frac{3}{4}s} \end{aligned}$$

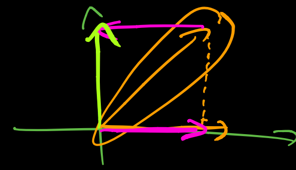
$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \frac{1}{4}\begin{bmatrix} t-3s \\ 6s-6t \\ 4t \\ 4s \end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} t \\ -6t \\ 4t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3s \\ 6s \\ 0 \\ 4s \end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underline{\underline{\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}}}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:



(i) $e^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)}$ & $e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)}$ & $e^{(3)} = \frac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

usw.

Beispiel: $\mathcal{P}_4$ mit $\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$, $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$

(i)

$$e^{(1)} = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1\, dx}} = \underline{1}$$

(ii)

$$e^{(2)'} = 3x^4 - \int_0^1 3x^4 \cdot 1\, dx \cdot 1$$

$$= 3x^4 - \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \underline{3x^4 - \frac{3}{5}}$$

$$\|e^{(2)'}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25}\, dx}$$

$$= \sqrt{\left[x^9 - \frac{18}{25}x^5 + \frac{9}{25}x\right]_0^1} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|} = \frac{5}{4}\left(3x^4 - \frac{3}{5}\right) = \underline{\underline{\frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}}}$$

Verallgemeinerte Norm:

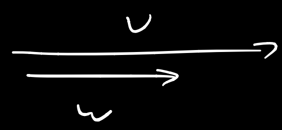
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

$\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$



Verallgemeinertes Skalarprodukt:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \langle a, b \rangle$$

$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, \lambda z \rangle$

$$= \underline{\lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle}$$

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Induzierte Norm:

$(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$, $a \in V$

$$\Rightarrow \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \langle x, y \rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle$

$$= x^T A \lambda (y+z) = \lambda x^T A y + \lambda x^T A z = \lambda \langle x, y \rangle_A + \lambda \langle x, z \rangle_A \quad \square$$

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

$$\langle x, y \rangle_A = x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x = \langle y, x \rangle_A \quad \square$$

(iii) $\langle x, x \rangle_A \geq 0 \iff$ EW > 0

Hurwitz: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$ pos. definit $\square$

$$\det(2) = 2 \underline{> 0}, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 10 - 4 = 6 \underline{> 0}$$

A^k – Eigenwertproblem & Diagonalisieren:

$$A^k x = \left(TDT^{-1}\right)^k x \qquad T \text{ besteht aus EV}, \; D = \operatorname{diag}(EW)$$

$$= TD\underbrace{T^{-1}T}_{I}D\underbrace{T^{-1}\ldots}_{I}\underbrace{T}_{I}DT^{-1}x$$

$$= TD^k\underbrace{T^{-1}x}_{z} \qquad D^k = \operatorname{diag}(EW^k)$$

$$z = T^{-1}x$$

$$x = Tz$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10}x \, ?$$

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$$= -\lambda \det\begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ 1\det\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2 - 2\lambda - 2\right] + 2\left[2\lambda - 4 + 2\right] + \left[4 + 2\lambda\right]$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 4\lambda - 4 + 2\lambda + 4$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$= \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \qquad \lambda_1 = \underline{0}, \; \lambda_2 = \underline{-2}, \; \lambda_3 = \underline{4}$$

EV: $(A - \lambda I)x = 0$

$$\lambda_1 = 0: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{G} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_0 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2 = -2: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_{-2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_3 = 4: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = (TDT^{-1})^{10}x = TD^{10}\underbrace{T^{-1}x}_{z}$$

$$x = Tz$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} z_3 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_1 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow A^{10}x = TD^{10}z = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Wir gehen von einem diagonalisierbaren A aus!

$$y' = \underline{A} \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = e^{At} \cdot y_0$$

aber wie?

$$y' = Ay = TD\underbrace{T^{-1}y}_{z}$$

$z = T^{-1}y$

$y = Tz$

$$y' = TDz$$

$$T^{-1}y' = Dz$$

$$z' = Dz \qquad \text{(entkoppelt!)}$$

$$\Rightarrow z = e^{Dt} z_0$$

$$\Rightarrow y = Tz = \underline{\underline{T \cdot e^{Dt} z_0}} = t^{(1)} e^{\lambda_1 t} z_{01} + t^{(2)} e^{\lambda_2 t} z_{02} + \ldots$$

$$y' = Ty \iff \begin{array}{l} y_1' = t_{11} y_1 + t_{12} y_2 + t_{13} y_3 \\ y_2' = t_{21} y_1 \ldots \\ y_3' = t_{31} y_1 \ldots \end{array}$$

$$z' = Dz \iff \begin{array}{l} z_1' = d_1 z_1 \\ z_2' = \qquad d_2 z_2 \\ z_3' = \qquad\qquad d_3 z_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = e^{d_1 t} z_{10} \\ z_2 = e^{d_2 t} z_{20} \\ z_3 = e^{d_3 t} z_{30} \end{array}$$

$$= \underline{e^{Dt} z_0}$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right)T^{-1} = Te^D T^{-1}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad y' = Ay$$

AWP: $\lim_{x \to \infty} y(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$y = e^{At} y_0 = T e^{Dt} T^{-1} y_0 = \underline{T e^{Dt} z_0} \quad \Big| \; z_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 0 & 2 \\ -9 & 3-\lambda & 1 \\ -9 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (3-\lambda) \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -9 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\left[(\lambda-3)(\lambda+6) + 18\right]$$

$\underline{\lambda_1 = 3}, \quad \underline{\lambda_2 = 0}, \quad \underline{\lambda_3 = -3}$

$(\lambda-3)(\lambda+6) + 18 \overset{!}{=} 0$

EV: $(A - \lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 3$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Ga.}} \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= s \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$

$$\Rightarrow \underline{E_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_2 = 0$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Ga.}} \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= s \\ x_2 &= \tfrac{2}{3}s \\ x_1 &= \tfrac{1}{3}s \end{aligned}$

$$\Rightarrow E_0 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda_3 = -3: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 6 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = \frac{5}{6}s \\ x_1 = \frac{2}{3}s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_3 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Te^{Dt} z_0 = c_1 \cdot e^{3t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_2 e^{0t}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

b) y_{01}, y_{02}, y_{03} s.d. $\lim_{t\to\infty} y(t) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{c_1 e^{3t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{\to\infty} + \underbrace{c_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}_{c_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}} + \underbrace{c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}}_{0}$$

$$\Rightarrow c_1 = 0 \qquad \Rightarrow c_2 = 1$$

$$z_0 = \begin{bmatrix}0\\1\\c_3\end{bmatrix}, \quad y_0 = T \cdot z_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+4c_3\\2+5c_3\\3+6c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_{01}\\y_{02}\\y_{03}\end{bmatrix}$$

$$= 0 \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Prüfung HS18:

1. [6 Punkte] In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu A aus den Eigenvektoren.

c) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) EW: $\det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] - \left[1-\lambda-2\right] + \left[2+\lambda-1\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-4\right] + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 6\lambda - 6$$

$$= (1-\lambda)\left[\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}_{\lambda=-1,\ 4} - 6\right]$$

$\underline{\lambda_1 = 1}$, $\underline{\lambda_2 = -1}$, $\underline{\lambda_3 = 4}$

EV: $(A-\lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -2s \end{array}$

$$\Rightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\lambda_2 = -1:$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = 0 \end{array}$

$$\Rightarrow E_{-1} = \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\lambda_3 = 4:$ $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$

$$\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) ONB : $\{E_1, E_{-1}, E_4\}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c)

$$e^A = T e^D T^T$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2e & e & e \\ 0 & -\sqrt{3}e^{-1} & \sqrt{3}e^{-1} \\ \sqrt{2}e^{4} & \sqrt{2}e^{4} & \sqrt{2}e^{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4e+2e^{4} & -2e+2e^{4} & -2e+2e^{4} \\ -2e+2e^{4} & e+3e^{-1}+2e^{4} & e-3e^{-1}+2e^{4} \\ -2e+2e^{4} & e-3e^{-1}+2e^{4} & e+3e^{-1}+2e^{4} \end{bmatrix}$$

2. [6 Punkte] Gegeben seien

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix A und den Vektor b an.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

Hinweis: Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen U und V in Teilaufgabe **c**). Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

d) [1 Punkt] Bestimmen Sie ein x sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$ gilt.

a)

$$\underline{\underline{A^TAx = A^Tb}}$$

b)

$$A = USV^T$$

U: EV von AA^T

V: EV von A^TA

S: $\sqrt{\lambda}$ von AA^T o. A^TA

$$V: \quad A^TA = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 156 & -108 \\ -108 & 219 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^TA - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\begin{bmatrix} 52-25\lambda & -36 \\ -36 & 73-25\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{(52-25\lambda)}\underbrace{(73-25\lambda)} - 36^2$$

$2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$

$\lambda = \underline{1}$ 27 48

$3 \cdot 3 \cdot 3$ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$\lambda = 2$ 2 23

$\lambda = 3$ -23 -2

$\lambda = \underline{4}$ -48 -27

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 4$

$\Rightarrow \sigma_1 = \underline{\underline{2}}$

$\sigma_2 = \underline{\underline{1}}$

c) $(A^T A - \lambda I)\, x = 0$

$$\lambda_1 = 4: \quad \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ -36 & -27 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = -\frac{3}{4} s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \underline{\operatorname{span}\left\{ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ -36 & 48 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = \frac{4}{3} s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_1 = \underline{\operatorname{span}\left\{ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\begin{bmatrix} 52 - 25\lambda & -36 \\ -36 & 73 - 25\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V = \underline{\underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}}$$

$$S = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

$$u^{(1)} = \frac{A \cdot v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{A\, v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75} \begin{bmatrix} -50 \\ -25 \\ 50 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(3)} = u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow U = \underline{\underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}}$$

d) Wissen $\quad Ax = b$

$$USV^T x = b$$

$$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} V^T x = d_0 \qquad S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \underline{V \hat{S}^{-1} d_0}$$

$$d_0 = \underline{\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$d = U^T b = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\right\} d_0 \\ \left.\right\} d_1 \end{matrix}$$

$$x = V \hat{S}^{-1} d_0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -13 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [1.5 Punkte] Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

Im Folgenden seien α und β nun wie in Teilaufgabe **a)**.

b) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Hinweis: Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

c) [1 Punkt] Berechnen Sie $|\det(A)|$.

a) $\underline{\underline{\beta = -1}}$, $\underline{\underline{\alpha = \frac{5}{2}}}$

b)

$$\underline{\underline{A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{R}}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 + 1} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

c) $|\det(A)| = |\det(Q\cdot R)| = |\underbrace{\det Q}_{\pm 1} \cdot \det R| = |\det R|$

$= \sqrt{5}\,\frac{\sqrt{45}}{2} \cdot 3 = \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\, \mathrm{d}y\right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.

d) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ (T überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

a) Die Abbildung ist zuerst einmal wohldefiniert, da:

$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}_3$, $\mathcal{F}(x) = \underline{\frac{1}{2}x} \in \mathcal{P}_3$, $\mathcal{F}(x^2) = \underline{x^2 - \frac{2}{3}x} \in \mathcal{P}_3$

Wir überprüfen auf Linearität $\forall a,b \in \mathcal{P}_3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

$\Rightarrow$ i) & ii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(a+\alpha b) &= (a+\alpha b) - \left(\int_0^1 y\,(a+\alpha b)'\,dy\right) x \\
&= a+\alpha b - \left(\int_0^1 y a' + \alpha y b'\,dy\right) x \\
&= a + \alpha b - x\int_0^1 y a'\,dy - \alpha x \int_0^1 y b'\,dy \\
&= a - x\int_0^1 y a'\,dy + \alpha\left(b - x\int_0^1 y b'\,dy\right) \\
&= \mathcal{F}(a) + \alpha\, \mathcal{F}(b) \quad \square
\end{aligned}$$

b)

$$1 \xrightarrow{F} 1 = \underline{1} \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$x \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x = 0 \cdot 1 + \underline{\frac{1}{2}} \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$x^2 \xrightarrow{F} x^2 - \frac{2}{3}x = 0 \cdot 1 \underline{- \frac{2}{3}} \cdot x + \underline{1} \cdot x^2$$

$$\Rightarrow A = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

c) $b^{(1)} = x - 1$, $b^{(2)} = x + 1$, $b^{(3)} = x^2 - 1$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}\left(b^{(2)} - b^{(1)}\right) \\ x &= \frac{1}{2}\left(b^{(1)} + b^{(2)}\right) \\ x^2 &= b^{(3)} + \frac{1}{2}\left(b^{(2)} - b^{(1)}\right) \end{aligned}\right\} \text{Bilden minimales Erzeugendensystem des } P_3 \Rightarrow \text{Basis}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang } 3$$

d) $B_2 = B_1$

$$x - 1 = \underline{-1} \cdot 1 + \underline{1} \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$x + 1 = \underline{1} \cdot 1 + \underline{1} \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$x^2 - 1 = \underline{-1} \cdot 1 + 0 \cdot x + \underline{1} \cdot x^2$$

$$\Rightarrow T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

5. [6 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

a) [1 Punkt] Mindestens ein Eigenwert von A ist strikt negativ.

b) [2 Punkte] Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top Ax < 0$.

c) [3 Punkte] Die Aussagen in a) und b) gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

a) A symm. $\Rightarrow$ $A = TDT^T$ existiert

$$\Rightarrow \det(A) = \det(TDT^T) = \underbrace{\det T}_{\pm 1} \det D \underbrace{\det T^T}_{\pm 1}$$

$$= \det D$$

$$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \quad \text{Multiplikation der EW}$$

$$< 0$$

$\Rightarrow$ $\exists$ mindesten ein i: $\lambda_i < 0$ $\square$

b)

$$x^T A x = x^T TDT^T x = (T^T x)^T D (T^T x)$$

$\Rightarrow$ wählen D so, dass negativer EW an erster Position

$\Rightarrow$ wählen $T^T x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $x = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{t^{(1)}}}$

$$[1\ 0 \ldots 0] \begin{bmatrix} -a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{-a} < 0 \quad \square$$

c) $A = SRS^T$ S orth.

R rechte obere Dreiecksmatrix

a) $\det(A) = \det(SRS^T) = \underbrace{\det S}_{\pm 1} \det R \underbrace{\det S^T}_{\pm 1}$

$= \det R = r_{11} \cdot r_{22} \cdot \ldots \cdot r_{nn}$

$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

< 0

b) $x^T A x = x^T S R S^T x = (S^T x)^T R (S^T x)$

$\Rightarrow$ wählen x als i-te Spalte von S, falls

$\lambda_i < 0$

6. [6 Punkte] Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt "Richtig" oder "Falsch" ankreuzen.

a) [1 Punkt] Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine reelle $n \times n$ Matrix, die in Matlab eingegeben wurde. Folgende Befehle werden darauf eingegeben:

```
>> [Q, ~] = qr(A);
>> max(diag( abs(Q.'*Q - eye(size(Q))) )) < 1e-1
```

Kreuzen Sie 'Richtig' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 1 zurückgibt. Kreuzen Sie 'Falsch' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 0 zurückgibt.

b) [1 Punkt] Sei A eine reelle 3×3 Matrix, welche schiefsymmetrisch ist, das heisst $A^\top = -A$. Dann ist gilt $\det(A) = 0$.

c) [1 Punkt] Wir definieren die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann, dass $P^{100} = P^{21}$.

d) [1 Punkt] Sei A eine reelle 2×2 Matrix und habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die characteristische Gleichung zu A lautet $x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

e) [1 Punkt] Die LR-Zerlegung einer Matrix A liefert

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von A ist 14.

f) [1 Punkt] Die folgende Matrix ist gegeben,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$.

a)

$$\max(\mathrm{diag}(\| \underbrace{Q^T Q - I}_{0} \|)) = 0$$

richtig

b)

$$\det(A^T) = \begin{cases} \det(A)^T = \det(A) \\ \det(-A) = (-1)^n \det(A) \end{cases}$$

richtig

c)

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

falsch

$$P^0 = P^3$$

$21 \bmod 3 = 0$

$100 \bmod 3 = 1$

d)

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

$$x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

richtig

e) falsch

$$P \cdot A = LR$$

f)

$$\begin{matrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 29 & 1 \end{matrix} \to$$

richtig